エネルギー空間より広い空間における非線形シュレディンガー方程式の散乱理論 (非線形波動および分散型方程式に関する研究)

高岡, 秀夫

数理解析研究所講究録 1355 巻 2004 年 107-116

エネルギー空間より広い空間における非線形シュレディンガー方程式の散乱理論

神戸大学・理学部　高岡秀夫 (Hideo Takaoka)
Department of Mathematics
Kobe University

1. 導入

次の非線形Schrödinger方程式を考える

$$iu_t + \Delta u = |u|^2 u \tag{NLS}$$

ただし，$u_t = \partial u/\partial t$, $u(t,x) : \mathbb{R}^{1+3} \to \mathbb{C}$である．ここでは，分散性の非線形波動現象を記述する上の方程式に対して，時間大域解の漸近挙動を問題としたい．なお，非線形項の次数に関しては，必ずしも3次と限らずともよいが，話を簡単にするため上の場合を扱う．

ここで考える解の時間大域的な漸近挙動とは，解の過去と未来とでの状況を比較する散乱問題である．まずは，初期値問題の大域可解性という考慮すべき問題があるが，その大域的な解を捉える枠組みとしては方程式の保存則に対応した関数空間が自然であろう．特に，上のようなハミルトン構造を持つ方程式は，普通エネルギー保存則を持ち，その多くの場合保存則から解の有界性に関する先験評価式が得られるという点からも，エネルギー保存則の関数空間は重要になる．一方，最近では調和解析的手法を用いたBourgainの研究に代表されるように，エネルギークラスよりも広い関数空間で初期値問題の適切性，時間局所解の接続問題，大域解の漸近挙動を扱った研究結果が数多く報告されている[5]．このような広い関数空間で初期値問題が適切であるかどうかを考えることは，保存系でない関数空間ということで，その影響が数学的な構造の違いが現れるのではないかという自然な研究要請による動機付けもあろうが，他方方程式を無限次元力学系と見た統計力学の立場からも重要な問題とされる[1]．実際，ここで試み

る解の漸近挙動の研究では，エネルギー保存則が方程式の対称性を簡単にする要素として存在し，それを排除することは困難なところであった．

ここでは，エネルギー空間よりも広い関数空間において，それら先行する理論を如何に拡張できるか，非線形Schrödinger 方程式の時間大域可解性の問題を散乱問題との関連で考えたい．数学的に解析する上で，(時空間及び周波数空間における）エネルギーの伝播と減衰に関する評価式が必要になるが，それをエネルギー保存系とは限らない解の関数空間に通用する道具として再構成する．なお，本研究はJ. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, T. Taoとの共同研究に基づく論文[10, 11]に沿って，この方面の研究で要となる評価式を中心に論じたい．

2. 研究状況及び結果

主定理を述べる前に，これまでに知られている事実を簡単に列挙しておく．ここでも空間3次元における非線形項3次の非線形Schrödinger方程式に話を限ることとする．より一般の場合の研究状況については，参考文献[5, 12, 19, 21]などを参照されたい．

まず，解の先験評価式を導く代表的な手法として，方程式の保存則を調べることがしばしば行われる．方程式の対称性から(NLS)の解$u(t)$に対して，L^2ノルム；$\|u(t)\|_{L^2}$とエネルギー

$$E(u) = \int \frac{1}{2}|\nabla u|^2\,dx + \int \frac{1}{4}|u|^4\,dx$$

は時間変数について不変な物理量であり，いわゆる保存量である．これら保存則とSobolevの埋蔵定理$H^1 \hookrightarrow L^4$を用いると，H^1の初期値$u(0) = u_0$が与えられれば，解のH^1ノルムに対する先験評価が期待される．

良く知られているように，時間局所解の存在定理にはStrichartz評価式[15, 20]が有効である．論文[6, 12]によれば，非線形項3次の場合の初期値問題(NLS), $u(0) = u_0$はH^s $(s \geq 1/2)$で局所的に適切となる．それと上の保存則とを組み合わせれば，H^s $(s \geq 1)$において大域的な適切性を示す．この初期値問題の適切性の問題では，homogeneous Sobolev空間$\dot{H}^{1/2}$においても局所的に適切であることが示される．この場合，関数空間$\dot{H}^{1/2}$は，方程式(NLS)の時空間変数の尺度に関するスケール変換に対して不変な関数空

間として捉えられ，初期値問題の適切性を論じる上で境目として位置する．さらに，H^1 よりも広い関数空間における時間大域可解性と散乱問題に関しては次のことが示されている．

- エネルギー空間 H^1 における散乱問題[4, 12, 17, 21]
- H^s $(s > 5/6)$ における時間大域解の存在定理[2, 9]
- H^s $(s > 5/7)$，球対称解に対する時間大域解の存在定理及び散乱問題[3]

なお，ここで言う散乱問題とは，線形Schrödinger方程式の自由解と非線形Schrödinger方程式の摂動解とを比較する波動作用素の存在，及び漸近的完全性である．つまり，初期値問題の解の漸近状態

$$u_\pm \approx e^{-it\Delta}u(t), \quad t \to \pm\infty$$

の一意存在，および波動作用素 $W_\pm : u_\pm \mapsto u(0)$ の漸近的完全性

$$\mathrm{Range}(W_+) = \mathrm{Range}(W_-) = H^s$$

を意味する．これにより，物理的にも重要な散乱作用素 $S = W_+^{-1} \circ W_- \, : \, H^s \to H^s \, ; \, u_- \mapsto u_+$ を整合良く定義することができる．

これら先行の結果に対して，ここでの主結果は次の定理である．

定理 1. $s > 4/5$, $u_0 \in H^s$ とする．このとき，初期値問題 (NLS), $u(0) = u_0$ は H^s において時間大域的に適切である．また，得られた時間大域解 $u(t)$ に対し

$$\lim_{t \to \pm\infty} \| e^{-it\Delta}u(t) - u_\pm \|_{H^s} = 0$$

を満たす漸近状態 $u_\pm \in H^s$ が一意に存在する．その際，波動作用素 $W_\pm : u_\pm \mapsto u_0$ が定義されるが，その作用は漸近的に完全である．

定理に少し補足を加えると，初期値問題の時間大域的適切性という視点で，この定理は論文[9]の結果の拡張である．その一方，散乱問題を扱った論文[3]に対しては，Sobolevの指数に注目する限り，結果は弱いようであるが，球対称という空間的な制約条件は排除されている．

3. Morawetz 型評価式

波の散乱状況は，解のエネルギーの伝播と減衰を表す積分による評価を手掛かりにして解析することができる．例えば定理の証明には，方程式を積分方程式に変換し，Strichartz 評価式を施すことにより，次のスケール不変な量を調べることがある[12]

$$\int_{\mathbb{R}^{1+3}} |u(t,x)|^5 \, dtdx < \infty. \tag{1}$$

従来は (1) の証明に，空間局所的なエネルギーの可積分性，Morawetz 評価式[18, 21] が有効とされた

$$\int_{I\times\mathbb{R}^3} \frac{|u(t,x)|^4}{|x|} \, dtdx \lesssim \sup_{t\in I} \|u(t)\|^2_{\dot{H}^{1/2}} \tag{2}$$

ここに，I は時間の区間を表す．他にも，Sobolev の臨界冪に応じた非線形項を扱った論文[4, 5] がある．そこでは，(2) の再洗練が行われ，今回の問題に対応させると，それはスケール不変性を伴う次の Morawetz 型評価式となる

$$\int_{|x|\leq|I|^{1/2}} \frac{|u(t,x)|^4}{|x|} \, dtdx \lesssim |I|^{1/2} E(u)$$

ただし，$|I|$ は時間区間 I の長さを表す．もしも，右辺の量が有界ならば，この不等式と波動方程式で言うところの波の有限伝播性とによる議論から，エネルギーの空間的な集約状況を解析しようとする一つのアイデアがある．そのような状況が得られた際，その発展を長時間に渡って追いかけ，集約場に対するエネルギーの減衰はどうかみることによって，散乱現象を推察する研究である．右辺の有界性を論じる上で，エネルギー保存則の空間がここで登場することになる．エネルギー空間よりも広い空間で散乱問題を扱った論文として[3] がある．そこでは，エネルギーの集約は一塊の場合，有限伝播性による議論が回避されている．その状況の工作が球対称解という仮定を課している．個々のエネルギー集約場の様子は (2) で解析できるが，それが多数になった場合，その議論と右辺の量とを同時に評価する理論は問題となる．そこで，定理の証明では，次の新しいタイプの Morawetz 型評価式を使う．

補題 2. $u(t,x)$ を (NLS) の解とする．このとき，次が成り立つ

$$\int_{I\times\mathbb{R}^3}|u(t,x)|^4\,dtdx \lesssim \sup_{t\in I}\|u(t)\|_{L^2}^2\|u(t)\|_{\dot H^{1/2}}^2. \tag{3}$$

ここで，L^2 ノルムの保存則を用いれば，右辺は $\|u(0)\|_{L^2}^2\sup_{t\in I}\|u(t)\|_{\dot H^{1/2}}^2$ と置き換えても良い．

上の (3) は，(NLS) の自由解に対する Strichartz 評価式としては周知の事実に過ぎないが，それが (NLS) の摂動解に対してもその特徴を残し，成立したことになる[2, 20, 22]．つまり，(3) は非線形解に対する Strichartz 型評価式と言えるかもしれない．

(3) は，通常の Morawetz 評価式 (2) の導出課程に知識を得て証明することができる．そこで，(2) の取り扱いを再考してみよう．(2) の導出法にはいろいろな仕方があると思うが，ここでは mass current による空間平均量を採用する．点 y を中心に

$$M_y(t)=\int\frac{x-y}{|x-y|}\cdot \mathrm{Im}u(t,y)\nabla u(t,y)\,dy$$

を定める．このとき，等式 $\|\frac{x}{|x|}u\|_{L^2}=\|u\|_{L^2}$ 及び 3 次元以上で成り立つ Hardy 型不等式 $\|\frac{x}{|x|}u\|_{\dot H^1}\lesssim\|u\|_{\dot H^1}$ の補間により次を得る

$$|M_0(t)|\lesssim\left|{}_{\dot H^{-1/2}}\langle\nabla u,\frac{x}{|x|}u\rangle_{\dot H^{1/2}}\right|\lesssim\|u(t)\|_{\dot H^{1/2}}^2. \tag{4}$$

不等式 (2) の左辺は，次の右辺第 3 項にその起源を有する

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}M_0(t) &= 4\pi\langle\delta_{x=0},|u(t,\cdot)|^2\rangle\\ &\quad+2\int\frac{1}{|x|}\left|\nabla u-\frac{x}{|x|}\left(\frac{x}{|x|}\cdot\nabla u\right)\right|^2dx\\ &\quad+\int\frac{|u|^4}{|x|}\,dx\end{aligned} \tag{5}$$

ただし，$u(t)$ は (NLS) の解とする．一方，(3) は上述の導出手順の延長上に表現することができる．先に定めた $M_y(t)$ が点 y を中心にした一塊のエネルギーの集約状況を制御するのに対し，ここではそれらの相互作用関係を表す次の量を定義する

$$M(t)=\int|u(t,y)|^2M_y(t)\,dy.$$

(4) に因れば

$$|M(t)| \lesssim \sup_{t\in I} \|u(t)\|_{L^2}^2 \|u(t)\|_{\dot{H}^{1/2}}^2, \ t \in I$$

が成り立つ．このとき，(5) と同様な計算から次を得る

$$\frac{d}{dt}M(t) = 4\pi\langle \delta_{x-y=0}, |u(t,x)|^2|u(t,y)|^2\rangle + R_1 + R_2$$

ただし，R_1, R_2 は (5) の右辺で言うところ，第2項の角運動量と第3項のポテンシャル量にそれぞれ相当し，非負な値である．

(2) は右辺第3項に相当する量から導かれるのに対し，(3) は右辺第1項から導かれる．ここでは用いないが，残りの R_1, R_2 もそれぞれ重要な解析量と思われるが，ここではこれ以上深入りしないこととする．その辺の研究状況については，[19] を参照されたい．

4. エネルギー評価式

定理の証明には，空間的なエネルギー伝播と有界性に関する不等式の他に，[2, 5, 9, 14] による周波数空間におけるエネルギー輸送評価式の組み合わせが必要となる．ここではエネルギー評価式について，その概説をしたい．

まずはいくつか記号を導入する．$s < 1$ とし，$m \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ を

$$m(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < N \\ \left(\frac{|\xi|}{N}\right)^{s-1}, & |\xi| > 2N \end{cases}$$

と定め，フーリエ掛算作用素 I を次で定義する

$$\widehat{Iu}(\xi) = m(\xi)\hat{u}(\xi)$$

ただし，N は初期値のノルム $\|u(0)\|_{H^s}$ にのみ依存するパラメターであり，後節で決める．このとき，I は低周波帯 $|\xi| < N$ では恒等作用素となり，高周波帯 $|\xi| > 2N$ ではパラメター N に関する重みつき $s-1$ 階の微分作用素を表す（$s < 1$ なので積分作用素と呼ぶべきかもしれない）．

[9] に従い，関数空間 H^s に対応する補助エネルギーを次で定義する

$$E^N(u) = E(Iu).$$

$u = u(t,x)$ を (NLS) の解とするとき，次の等式が成り立つ

$$\frac{d}{dt}E^N(u) = \mathrm{Re}\int \left(|Iu|^2 Iu - I(|u|^2 u)\right)\overline{Iu_t}\,dx.$$

右辺第2項は，方程式に作用素Iを施した$\Delta Iu = I(|u|^2u) - iIu_t$ の右辺第1項である．この等式の両辺を時間積分し，右辺はcommutator評価[7, 8, 13]によって処理する．右辺のIu_tに対しては，再び方程式にIを施した$Iu_t = i\Delta Iu - iI(|u|^2u)$ を用いる．具体的には次の2つの不等式が得られる

$$\left|\int_{I\times\mathbb{R}^2}\left(|Iu|^2Iu - I(|u|^2u)\right)\overline{\Delta Iu}\,dtdx\right| \lesssim N^{-1+}\|\nabla Iu\|_{ST(I)}^4$$

$$\left|\int_{I\times\mathbb{R}^2}\left(|Iu|^2Iu - I(|u|^2u)\right)\overline{I(|u|^2u)}\,dtdx\right| \lesssim N^{-1+}\|\nabla Iu\|_{ST(I)}^6$$

これにより，エネルギー変化に対する次の補題を得る．

補題 3. $u(t)$を(NLS)の解とする．このとき，次が成り立つ

$$E^N(u(t_2)) - E^N(u(t_1)) \lesssim N^{-1+}\|\nabla Iu\|_{ST(I)}^4(1 + \|\nabla Iu\|_{ST(I)}^2)$$

ただし，$I = [t_1, t_2]$であり，$\|\cdot\|_{ST(I)}$は3次元Schrödinger方程式のStrichartzノルムを表す

$$\|u\|_{ST(I)} = \|u\|_{L_t^\infty(I)L_x^2(\mathbb{R}^3)} + \|u\|_{L_t^2(I)L_x^6(\mathbb{R}^3)}.$$

論文[9]では，補題3とスケールによる議論から，時間局所解の大域接続問題が扱われた．次の節では，補題2と補題3とを組み合わせ，散乱問題を含めた形で大域解の存在定理を証明する．

5. 定理の証明

以下，特にことわらない限り，$u = u(t, x)$は(NLS)の解を表すものとする．問題の対称性から$t > 0$を考えれば十分である．

(1)ではL^5ノルムの有界性を取り上げたが，今回のようにSobolevの指数sが$s = 1$よりも値の程度としてそれほど離れていなければ，あるいは逆に述べれば初期値問題の臨界指数$s = 1/2$にそれほど近くなければ，他のノルムの有界性を示すことで実用上は問題ない．具体的に述べれば，論文[12]にあるように，定理の範疇($s > 4/5$)ではStrichartz評価式により，$L_{t,x}^5$ノルムの有界性を$L_t^\infty H_x^s$ノルムと$L_{t,x}^4$ノルムの有界性で導くことができる．ここでは，そのルベーグノルムL^4に着目し，定理の証明の概説を述べるに努めたい．

まず，議論を簡潔にするため，方程式にスケール変換を施す．変換

$$u_\lambda(t,x) = \frac{1}{\lambda} u\left(\frac{t}{\lambda^2}, \frac{x}{\lambda}\right)$$

に対して，スケールパラメターを $\lambda \ll N^{(1-s)/(s-1/2)}$ と定める．このとき，次が成り立つ

$$E^N(u_\lambda(0)) \ll \|u(0)\|_{H^s}^2$$

$$\|u_\lambda(0)\|_{L^2} = \lambda^{1/2}\|u(0)\|_{L^2} \tag{6}$$

定理の証明の方針としては，任意の時刻 $t = T$ に対して

$$\|u_\lambda(T)\|_{H^s} + \|u_\lambda\|_{L^4((0,T)\times\mathbb{R}^3)} \le C(\|u(0)\|_{H^s})$$

を目指す．

次のような区間 $[0,T]$ の分割を仮定する

(i) $\sum_{j=1}^J I_j = [0,T]$, $I_j = [t_{j-1}, t_j)$ または $I_j = (t_{j-1}, t_j]$

(ii) $\|u_\lambda\|_{L^4(I_j\times\mathbb{R}^3)} \le \varepsilon$, $1 \le j \le J$

ただし，$\varepsilon > 0$ は $\|u(0)\|_{H^s}$ のみに依存する十分小さい数とする．この様な仮定が妥当であるかは危惧するところであるが，まずは肯定的に話を進めたい．

(ii) を仮定すると，Strichartz評価により解の評価が行える．実際，初期値問題を書き換え，積分方程式により次を得る

$$\|\nabla I u_\lambda\|_{ST(I_j)} \le C(\varepsilon)\|I u_\lambda(t_{j-1})\|_{\dot H^1} \tag{7}$$

このとき，補間不等式 $\|u_\lambda\|_{\dot H^{1/2}} \lesssim \|u_\lambda\|_{L^2}^{1/2}\|I u_\lambda\|_{\dot H^1}^{1/2}$ を用いて，(6)-(7) から (3) の右辺を眺めると

$$\|u_\lambda\|_{L^4((0,T)\times\mathbb{R}^3)}^4 \lesssim \lambda^{3/2}\|u(0)\|_{L^2}^3\|I u_\lambda(0)\|_{\dot H^1}$$

が期待されたい．その際，本質的に必要となるのは $\|I u_\lambda(t)\|_{\dot H^1}$ に関する上からの評価であろうが，それは補題3で処理できる．このとき，もし次の関係式が成り立てば，補題2と補題3に対し，ある意味合いを以って一様な帰納的反復法を少なくとも $t = T$（ステップ回数 J 回）まで適用することができる

$$(\|u_\lambda(t_j)\|_{\dot H^s} \le)\ \|I u_\lambda(t_j)\|_{\dot H^1} \ll \|u(0)\|_{H^s},\ 1 \le j \le J$$

$$\left(\sum_{j=1}^{J}\|u_\lambda\|_{L^4(I_j\times\mathbb{R}^3)}^4 \le\right)\varepsilon^4 J \lesssim \lambda^{3/2} \lesssim N^{1-}$$

ここで，補題3の右辺は (7) で処理する．定理の $s > 4/5$ という仮定は λ に関する条件 $\lambda \ll N^{(1-s)/(s-1/2)}$, $\lambda^{3/2} \lesssim N^{1-}$ による $N^{(5s-4)/(2s-1)-} \gg 1$ から現れる．これより，スケール変換 $u_\lambda \mapsto u$ 及び Strichartz 評価による議論から，L^4 ノルムと Strichartz 評価の有界性，すなわち

$$\int_{(0,\infty)\times R^3}|u(t,x)|^4\,dtdx < \infty, \quad \|\nabla u\|_{ST(0,\infty)} < \infty$$

が得られる．

波動作用素の漸近的完全性の証明は，本質的に縮小写像による積分方程式の可解性に従うが、それは通常の初期値問題の可解性とほぼ同様なので，ここでは割愛する．

参考文献

1. J. Bourgain, Periodic nonlinear Schrödinger equation and invariant measures, Comm. Math. Phys. 166 (1994), 1–26.
2. ———, Refinements of Strichartz's inequality and applications to 2D-NLS with critical nonlinearity, Internat. Math. Res. Notices, **5** (1998), 253–283.
3. ———, Scattering in the energy space and below for 3D NLS, Jour. D'Anal. Math., **75** (1998), 267–297.
4. ———, Global wellposedness of defocusing critical nonlinear Schrödinger equation in the radial case, J. Amer. Math. Soc., **12** (1999), 145–171.
5. ———, *Global solutions of nonlinear Schrödinger equations*, American Math. Society, Providence, R.I., 1999.
6. T. Cazenave and F. Weissler, The Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation in H^1, Manuscripta Math., **61** (1988), 477–494.
7. R. Coifman and Y. Meyer, Commutateurs d'intégrales singuliéres et opérateurs multilinéaires, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **28** (1978), 177–202.
8. ———, *Au delá des opérateurs pseudo-différentiels*, Astérisque, 57. Société Mathématique de France, Paris, 1978.
9. J. Colliander, M. Keel, G. Staffilani, H. Takaoka and T. Tao, Almost conservation laws and global rough solutions to a nonlinear Schrödinger equation, Math. Res. Lett., **9** (2002), 1 - 24.
10. ———, Existence globale et diffusion pour léquation de Schrödinger nonlineaire repulsive cubique sur $\mathbb{R}^3$ en dessous léspace dénergie, Journees "Equations aux Derivees Partielles" (Forges-les-Eaux, 2002), Exp. No. X, 14 pp., Univ. Nantes, Nantes, 2002.
11. ———, Global existence and scattering for rough solutions of a nonlinear Schrödinger equation $\mathbb{R}^3$, preprint.
12. J. Ginibre and G. Velo, Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations, J. Math. Pures Appl., **9** (1985), 363–401.
13. T. Kato and G. Ponce, Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations, Comm. Pure Appl. Math., **41** (1988), 891–907.
14. M. Keel and T. Tao, Local and global well-posedness of wave maps on R^{1+1} for rough data, Internat. Math. Res. Notices, **21** (1998), 1117–1156.
15. ———, Endpoint Strichartz estimates, Amer. J. Math., **120** (1998), 955–980.
16. ———, Global well-posedness for large data for the Maxwell-Klein-Gordon equation below the energy norm, preprint.

17. J. Lin and W. Strauss, Decay and scattering of solutions of a nonlinear Schrödinger equation, Journ. Funct. Anal., **30** (1978), 245–263.
18. C. Morawetz, Time decay for the nonlinear Klein-Gordon equation , Proc. Roy. Soc. A, **306** (1968), 291–29
19. K. Nakanishi, Energy scattering for nonlinear Klein-Gordon and Schrödinger equations in spatial dimensions 1 and 2, J. Funct. Anal., 169 (1999), 201–225.
20. R. S. Strichartz, Restriction of Fourier transform to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, Duke Math. J., **44** (1977), 705–774.
21. W. Strauss, *Nonlinear wave equation*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 73 (1989).
22. T. Tao, Multilinear weighted convolution of L^2 functions, and applications to nonlinear dispersive equations, Amer. J. Math. **123** (2001), 839–908.